Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Determinar los valores de *a* y *b* para que la función *f* definida de la forma $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & \text{si} \quad x \le 2 \\ -x^2 + bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ sea derivable en todo $x \in R$. (2,5 puntos)

Como f es derivable en su dominio, también es continua en su dominio, en particular es continua y derivable en x = 2.

Como es continua en x = 2 , $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + 4x + a) = 2^2 + 4(2) + a = 12 + a$.

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x^2 + bx) = -2^2 + b(2) = -4 + 2b$. Igualando **12 + a = -4 + 2b.**

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & \text{si} \quad x \le 2 \\ -x^2 + bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$; $\qquad f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -2x + b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Como es derivable en x = 2, tenemos $f'(2^-) = f'(2^+)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

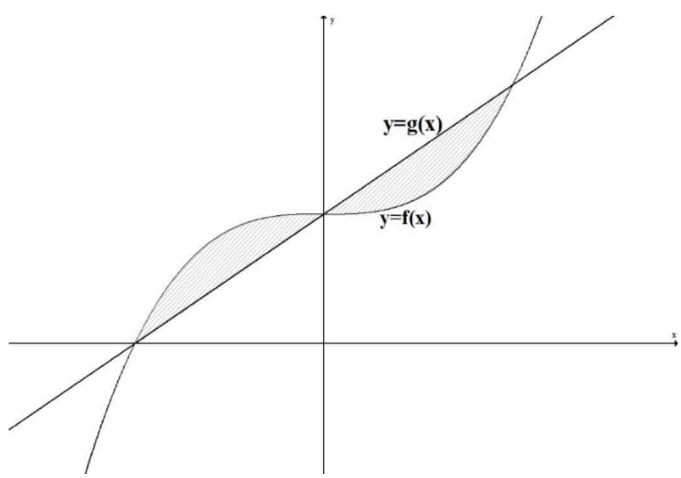
$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x + 4) = 2(2) + 4 = 8$.

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (-2x + b) = -2(2) + b = -4 + b$. Igualando tenemos **8 = -4 + b,** de donde **b = 12.**

Entrando en **12 + a = -4 + 2b** $\rightarrow$ 12 + a = -4 + 2(-12), de donde **a = -40.**

Los valores pedidos son a = -40 y b = 12.

2.- Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$ (2,5 puntos)



Corte de $x^3 + 1 = x + 1 \rightarrow x^3 = x \rightarrow x^3 - x = 0 = x\cdot(x^2 - 1) = x\cdot(x - 1)\cdot(x + 1)$, de donde x = -1, x = 0 y x = 1 que serán los límites de integración.

El área pedida es $A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0}(f - g)dx + \int_{0}^{1}(g - f)dx = \int_{-1}^{0}(x^3 + 1 - x - 1)dx + \int_{0}^{1}(x + 1 - x^3 - 1)dx =$

$= \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$ = [(0)-(1/4-1/2)] + [(1/2-1/4) - (0)] u.a. **= 1/2 a.u.**

3. Sea M la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales $\left.\begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2Y = M^{-1} \end{array}\right\}$

(2,5 puntos)

Como aparece M-1, existe M^{-1}.

De $\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 - (1) = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot Adj(M^t)$.

$|M| = -1$; $M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; luego $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot Adj(M^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2Y = M^{-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{por } 3 \\ \text{por } -2 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6X + 9Y = 3M \\ -6X + 4Y = -2M^{-1} \end{array}\right\} \text{Sumando} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6X + 9Y = 3M \\ 13Y = 3M - 2M^{-1} \end{array}\right\}$, de donde **Y = (1/13)·(3M – 2M⁻¹)**

$\left.\begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2Y = M^{-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{por } 2 \\ \text{por } 3 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4X + 6Y = 2M \\ 9X - 6Y = 3M^{-1} \end{array}\right\} \text{Sumando} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6X + 9Y = 3M \\ 13Y = 2M + 3M^{-1} \end{array}\right\}$, de donde **X = (1/13)·(2M + 3M⁻¹)**

Las matrices pedidas son:

$\mathbf{X = (1/13)\cdot(2M + 3M^{-1})} = \frac{1}{13} \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{13} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -19 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$

$\mathbf{Y = (1/13)\cdot(3M - 2M^{-1})} = \frac{1}{13} \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{13} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$

4.- Dado el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 2, 1), es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π. (1,25 puntos)

a)

Escribir la ecuación de la recta r en forma continua.

Tomo **x = b** con $b \in R$, luego **y = 1 – 2b**, entrando en la 1ª $\rightarrow$ $b - 1 + 2b + z = 3$ $\rightarrow$ **z = 4 – 3b**

Un punto de "r" es A(0, 1, 4) y un vector director es **u** = (1, -2, -3) y **su ecuación continua de la recta es**

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{-3}$$

b)

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 2, 1), es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

Para el plano π necesitamos un punto, el punto P(1, 2, 1) y dos vectores independientes, uno el director de la recta "r" el **u** = (1, -2, -3) y el otro el normal del plano π, el **n** = (2, 1, -1).

El plano pedido es $\pi \equiv \det(\mathbf{PX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \det(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 =$

$= (x - 1)(2 + 3) - (y - 2)(-1 - 6) + (z - 1)(1 + 4) = 0 =$ **5x - 7y + 5z - 17 = 0**.

OPCIÓN B

1. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x)}{\text{sen}(x^2)}$. (1,25 ptos)

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2}$ (1,25 ptos)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x)}{\text{sen}(x^2)} = \frac{e^0 + e^0 - 2\cos(0)}{\text{sen}(0)} = \frac{1+1-2}{0} = \frac{0}{0}.$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en [a - δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞), con lo cual tenemos

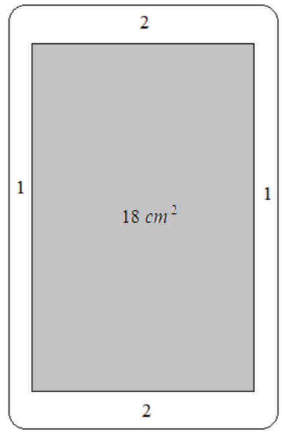
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x)}{\text{sen}(x^2)} = (0/0;\text{L'H}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\text{sen}(x)}{\cos(x^2)\cdot 2x} = = (0/0;\text{L'H}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos(x)}{-\text{sen}(x^2)\cdot(2x)^2 + \cos(x^2)\cdot 2} =$$

$$= \frac{1+1+2}{0+1\cdot 2} = 2.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{4} - 2}{0} = (0/0;\text{L'H}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{4+x}} - \frac{1}{4}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4 - 2\cdot\sqrt{4+x}}{2\cdot\sqrt{4+x}}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4 - 2\cdot\sqrt{4+x}}{4x\cdot\sqrt{4+x}} =$$

$$= (0/0;\text{L'H}) = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{4+x}}}{4\cdot\sqrt{4+x} + 4x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{4+x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{\sqrt{4+x}}}{4\cdot\sqrt{4+x} + 4x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{4+x}}} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{4}}}{4\cdot\sqrt{4}} = \frac{-1}{16}.$$

2.- Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2. Los bordes superior e inferior han de tener 2 *cm* cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



Es un problema de optimización.
Considero la base de la pantalla como "x" y su altura como "y".

La base del teléfono es "x + 2" cm. y su altura "y + 4" cm.

Función a maximizar A = (x + 2)(y + 4)

Relación entre las variables $x \cdot y = 18$, de donde $y = 18/x$, tomamos sólo la solución positiva porque es una longitud.

Función a maximizar $A(x) = (x + 2)((18/x) + 4) = 18 + 4x + 32/x + 8 = 4x + 32/x + 26$.
Si $A'(b) = 0$ y $A''(b) > 0$, x = b es un mínimo de A(x)

$A'(x) = 4 - 32/x^2$. De $A'(x) = 0$, tenemos $4 - 32/x^2 = 0$, es decir $x^2 = 8$, de donde $x = \pm\sqrt{(8)} \cong \pm 2'828$, y como "x" es una longitud $x = +\sqrt{(8)}$.

Las medidas del teléfono son: base "x + 2" = $\sqrt{(8)} + 2$ cm $\cong$ 4'828 cm e "y + 4" = $18/\sqrt{(8)} + 4$ cm=10'364cm.

Veamos que $x = \sqrt{(8)}$ es un mínimo, viendo que $A''(\sqrt{(8)}) > 0$
$A'(x) = 4 - 32/x^2 = 4 – 32\cdot x^{-2}$.
$A''(x) = 0 – 32.(-2).x^{-3} = 64/x^3$

Sustituyendo "$\sqrt{(8)}$" por "x" en A''(x) obtenemos $A''(\sqrt{(8)}) = 64/(\sqrt{(8)})^3 \cong 2'828 > 0$, luego es un mínimo.

El teléfono tarjeta tiene de alto 10'364 cm y de ancho 4'828 cm.

3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2,5 puntos)

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + (2) = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$.

$|A| = -1$; $A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; luego $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la expresión $A^{-1}XA = B$ por la izquierda por A y por la derecha por A^{-1} tenemos:

$A \cdot A^{-1}XA \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} \rightarrow I \cdot X \cdot I = A \cdot B \cdot A^{-1} \rightarrow \mathbf{X = A \cdot B \cdot A^{-1}}$

Luego $\mathbf{X = A \cdot B \cdot A^{-1}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

4. Dados la recta $r \equiv x = y + 1 = \dfrac{z - \frac{11}{m}}{\frac{-3}{m}}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + z = 9$ se pide

a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π. (1,25 puntos)
b) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π. (1,25 puntos)

a)
Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π.

Un vector normal del plano es $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$, y un vector director de la recta "r" es $\mathbf{v} = (1, 1, -3/m)$. También sabemos que si la recta r es paralela al plano π, sus vectores respectivos son perpendiculares, por tanto su producto escalar ($\bullet$) es cero.

Tenemos $\mathbf{n} \bullet \mathbf{v} = 0 = (2, 1, 1) \bullet (1, 1, -3/m) = 0 = 2 + 1 - 3/m = 0 \rightarrow 3 = 3/m$, de donde **m = 1, para que la recta y el plano sea paralelos**
b)
Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π.

Ponemos la recta "r" en vectorial o paramétrica y entramos con ella en la ecuación del plano. Resolvemos dicha ecuación con una incógnita y lo interpretamos.

De "r" punto el $A(0, -1, 11/2)$ y vector director el $\mathbf{v} = (1, 1, -3/2)$. Ecuación vectorial:
$r \equiv (x,y,z) = (0, -1, 11/2) + b \cdot (1, 1, -3/2) = (b, -1 + b, 11/2 + (-3/2)b)$ con $b \in R$. Sustituimos en "π"

$2(b) + (-1 + b) + (11/2 + (-3/2)b) = 9 \rightarrow 2b - 1 + b + 11/2 - (3/2)b = 9 \rightarrow (3/2)b + 9/2 = 9 \rightarrow$
$\rightarrow 3b + 9 = 18 \rightarrow 3b = 9$, de donde $b = 3$ y el punto de corte de resta y plano es:
$Q((3), -1 + (3), 11/2 + (-3/2)(3)) = Q(3, 2, 1)$.